

# Bornes stochastiques sur les mesures de performance pour des réseaux de files d'attente en tandem

Farah AIT SALAHT \*

LIP6, Université Paris Ouest Nanterre  
4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France  
Email : farah.aitsalaht@u-paris10.fr

## 1. Introduction

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à l'évaluation de performance de réseaux de files d'attente en tandem, en temps discret. L'analyse numérique exacte de ces systèmes est très difficile, voire impossible à effectuer lorsque leur taille est grande. Parmi les méthodes souvent utilisées dans la littérature, on cite la simulation qui est simple et l'approche par décomposition. Cependant, ces approches ne sont que des méthodes d'analyse approximatives. Dans ce travail, nous proposons d'avoir une démarche tout à fait différente qui consiste à déterminer des bornes plutôt que des approximations sur les processus exacts de sortie du réseau (distributions de sortie, distribution de pertes et délais de bout en bout).

Pour notre étude, nous avons considéré des arrivées par batch, des services déterministes et des files d'attente à capacité finies. Nous avons ainsi développé quatre approches d'analyse distinctes permettant de déterminer des bornes stochastiques sur les mesures de performance du réseau sans aucune hypothèse sur le trafic en entrée. Pour ces systèmes, nous avons montré grâce à certains résultats théoriques prouvés [1] et sous certaines conditions, la possibilité de déterminer des encadrements fiables sur les mesures de performance. La garantie de la qualité de service représente bien évidemment notre objectif principal dans ce travail.

## 2. Bornes sur les mesures exactes des réseaux de files d'attente en tandem

Nous considérons un réseau de files d'attente en tandem en temps discret noté comme suit :  $H_1/D/S_1/B_1 \rightarrow /D/S_2/B_2 \rightarrow \dots \rightarrow /D/S_N/B_N$ ,

composé de N files d'attente en série. Chaque file d'attente  $i$  possède un tampon de longueur finie  $B_i$  et un service constant de capacité  $S_i$ . Le système est supposé vide au départ. Les données entrent dans la première file d'attente selon une distribution d'arrivée  $H_1$ , puis passent à travers les files d'attente dans l'ordre : les données sortantes de la première file d'attente entrent au bout d'au moins un intervalle de temps dans la deuxième file d'attente (système slotté), et ainsi de suite (voir fig. 1).

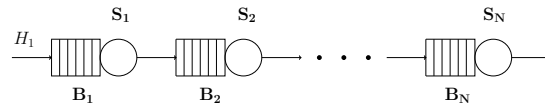


FIGURE 1 – Réseau en tandem composé de N files d'attente.

Lors de l'analyse de réseaux en tandem, nous remarquons que lorsque la séquence des capacités de service est croissante, l'analyse du réseau revient à étudier uniquement la première file. Sinon, des modifications peuvent être apportées au réseau initial simplifiant ainsi sa résolution. Pour cela nous introduisons les notions suivantes :

### Definition 1 (Bottlenecks)

- Une file  $i$  est *bottleneck local* (noté BL) si  $\forall j < i, S_j > S_i$ .
- Une file  $i$  ( $i \geq 1$ ) est *bottleneck global*, noté BG si
  1.  $\forall j > 1, j \neq i : S_j > S_i$ ;
  2. ou si  $S_j = S_i$ , alors  $i < j$ .

Selon l'emplacement des *bottlenecks* dans le réseau, nous distinguons les cas suivants :

1. **Bottleneck global en tête du réseau.** Le fait que la file d'entrée du réseau soit un BG revient à dire que les files de 2 à N ne perdent aucune données. Dans ce cas, l'analyse du système peut être effectuée de façon exacte. La première file est analysée. Pour les autres files, seuls les délais de traversée seront considérés.
2. **Si non,** nous proposons de dériver une forme réduite du réseau initial (postprocessing sur le délai et la taille du réseau) comme suit :
  - (a) Si nous avons une file  $i$  telle que  $i > BL$  (ou  $i > BG$ ) et  $i$  n'est ni BL ni BG, alors la file  $i$  est supprimée du réseau.
  - (b) Si nous avons une file  $i$  telle que  $i > 1$  et qui est située avant le premier BL, alors nous pouvons également l'éliminer.

Nous définissons au final un nouveau réseau réduit, composé uniquement de la première file d'attente du réseau initial, des bottlenecks locaux et

\*. Ce travail a été réalisé avec H. Castel-Taleb, J.M. Fourneau et N. Pekergin.

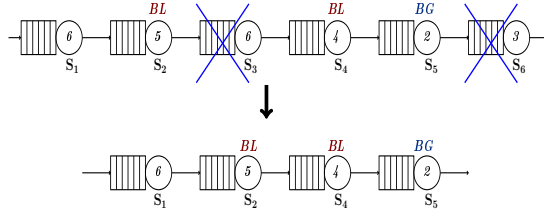


FIGURE 2 – Exemple de simplification d’un réseau en tandem.

du bottleneck global. Notre but à présent consiste à analyser ce nouveau réseau et déterminer des bornes sur ses mesures de performances. Une généralisation au réseau initial sera ensuite effectuée en ajoutant les temps de traversée des files non considérées. Nous proposons quatre approches d’analyse permettant de définir des bornes stochastiques (bornes "st") supérieures ou inférieures sur les paramètres du réseau en tandem : nombre de données traitées, délais de bout en bout et nombre de pertes dans le réseau. Notons que la comparaison stochastique [3] est utilisée dans ce travail. Une brève description de la nature des bornes ainsi que de la démarche suivie pour la construction de ces approches est donnée ci-après.

### 2.1. Approche 1 : Bornes st-supérieures sur la distribution de sortie et le délai de traversée du réseau

Nous utilisons dans cette approche le théorème de Friedman [2] sur l’interchangeabilité des files dans un réseau en tandem. Ce résultat stipule que pour des tampons de capacité infinis, le délai de bout en bout dans un réseau en tandem ne dépend pas de l’ordre des files dans le réseau. Ainsi, reposant sur ce résultat, nous proposons de fixer toutes les longueurs des tampons des files d’attente du réseau à l’infinie, ce qui nous permet de dériver des bornes supérieures sur les mesures de performance du réseau initial. Puis, en utilisant la propriété d’interchangeabilité, de déplacer la file *bottleneck* global en tête du réseau et se ramener ainsi à l’analyse d’une seule file d’attente (file *BG*).

### 2.2. Approche 2 : Bornes st-supérieures sur les performances d’une file $i$

Pour calculer les performances d’une file  $i$  du réseau, nous proposons de suivre les étapes suivantes : 1) fixer tous les tampons des files  $j < i$  à l’infini, ce qui nous permet de définir des bornes supérieures sur les performances de la file  $i$ ; 2) déterminer le *BG* parmi les files 1 à  $i - 1$  et utiliser le théorème d’interchangeabilité de Friedman [2] pour déplacer la file *BG* en tête du réseau et enfin

3) éliminer les files 2 à  $i - 1$ . Cette approche nous ramène à l’étude du système résiduel composé de la file 1 (file *BG*) et de la file  $i$ .

### 2.3. Approche 3 : Bornes st-inférieures sur les performances d’une file $i$

Pour cette approche, nous fixons les longueurs des tampons des files  $j < i$  à zéro. En effectuant cette modification, nous définissons des bornes inférieures sur les paramètres de sortie de la file  $i$ . De plus, l’analyse du réseau peut se résumer à l’analyse de la file  $i$  uniquement, tel que l’histogramme d’entrée de la file  $i$  correspond au filtrage de la séquence d’entrée  $H_1$  du réseau sur tous les services des files d’attente qui précèdent la file  $i$ .

### 2.4. Approche 4 : Bornes st-supérieures sur les performances d’une file $i$

Pour une file d’attente  $i$  ( $i > 1$ ) du réseau, nous proposons de fixer les capacités de service des files  $j < i$  à l’infini. Cette modification permet non seulement de dériver des bornes supérieures sur les nombres de données en sortie et le nombre total de pertes dans le réseau, mais également de simplifier son analyse en se ramenant à l’analyse de la file d’attente  $i$  uniquement avec comme séquence d’entrée  $H_1$ .

## 3. Conclusion

Pour l’analyse d’un réseau en tandem, nous proposons dans un premier temps une simplification du réseau initial par la recherche de bottlenecks. Nous proposons par la suite d’utiliser l’une des quatre approches proposées afin de dériver des bornes inférieures ou supérieures prouvées sur des indices de performance du réseau. Grâce à ces approches, on se ramène souvent à l’analyse de réseaux réduits plus simples qui permettent d’avoir des garanties sur les mesures de performances exactes du réseau. Notons également que cette approche peut être étendue aux réseaux en arbres, car l’analyse de ces réseaux peut s’effectuer en décomposant le réseau initial en sous-réseaux en tandem.

## Bibliographie

1. F. Ait-Salaht. *Chaînes de Markov Incomplètement Spécifiées : analyse par comparaison stochastique et application à l’évaluation de performance des réseaux*. PhD thesis, Université de Versailles Saint-Quentin, 2014.
2. H. D. Friedman. *Reduction methods for tandem queueing systems* 13 : 121–131, 1965.
3. A. Müller and D. Stoyan. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley, New York, NY, 2002.